

Recapitulando

Base $\mathcal{B} = \{|b_i\rangle : i \in I\}$ $\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij}$

$$|\alpha\rangle = \sum_{i \in I} a_i |b_i\rangle \quad a_i = \langle b_i | \alpha \rangle$$

$$[|\alpha\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle b_1 | \alpha \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n | \alpha \rangle \end{pmatrix} \Rightarrow [|b_j\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{entrada } j \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$[\langle \alpha |]_{\mathcal{B}} = (\langle \alpha | b_1 \rangle, \dots, \langle \alpha | b_n \rangle) = (a_1^*, \dots, a_n^*)$$

$$[|b_i\rangle \langle b_j|]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow j \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

$$\sum_{i \in I} |b_i\rangle \langle b_i| = \mathbb{1} \quad \left(\begin{matrix} \text{es importante que sean el mismo} \\ \text{índice y que se sumen todos los} \\ \text{de la base.} \end{matrix} \right)$$

Representación matricial de operadores

$$\hat{A} = \mathbb{1} \hat{A} \mathbb{1} = \sum_{i,j} |b_i\rangle \langle b_i| \hat{A} |b_j\rangle \langle b_j| = \sum_{i,j} \underbrace{\langle b_i | \hat{A} | b_j \rangle}_{A_{ij}} |b_i\rangle \langle b_j|$$

ojo: dos índices

$$[\hat{A}]_{ij} = A_{ij} = \langle b_i | \hat{A} | b_j \rangle$$

fila $\nwarrow$ columna

Otra forma de obtener $[|b_i\rangle \langle b_j|]_{\mathcal{B}}$

$$\hat{B} = |b_i\rangle \langle b_j|, \quad [B]_{kl} = \langle b_k | |b_i\rangle \langle b_j| | b_l \rangle = \delta_{ki} \delta_{lj}$$

es cero excepto si $k=i$ y $l=j$.

Para que funcione producto de matrices

$$[\hat{A}\hat{B}]_{ij} = \langle u_i | \hat{A}\hat{B} | u_j \rangle = \sum_k \langle u_i | \hat{A} | u_k \rangle \langle u_k | \hat{B} | u_j \rangle$$

$$= \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$i \begin{pmatrix} \xrightarrow{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow B \\ j \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \quad j \end{pmatrix}$$

Ejemplos

el orden importa



Base ortonormal $\mathcal{B} = \{|\Delta\rangle, |\odot\rangle\}$

1) Para $|\psi\rangle = |\Delta\rangle + |\odot\rangle$

¿Cómo es $[\psi]_{\mathcal{B}}$?

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle \Delta | \psi \rangle \\ \langle \odot | \psi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Delta | \Delta \rangle + \langle \Delta | \odot \rangle \\ \langle \odot | \Delta \rangle + \langle \odot | \odot \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siguiendo el orden de la base

Base $\mathcal{X} = \{|a\rangle, |b\rangle\}$

$$2) \hat{A} = |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|$$

Representación matricial

$$[\hat{A}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \langle a|\hat{A}|a\rangle & \langle a|\hat{A}|b\rangle \\ \langle b|\hat{A}|a\rangle & \langle b|\hat{A}|b\rangle \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \times 2 \text{ porque la base} \\ \text{tiene 2 elementos} \end{array}$$

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = \langle a| [|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|] |a\rangle$$

Tener cuidado de distribuir todo

$$= \langle a|a\rangle\langle b|a\rangle + \langle a|b\rangle\langle a|a\rangle \\ = 0$$

$$\langle b|\hat{A}|b\rangle = 0 \text{ análogo (inténtenlo)}$$

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle \text{ (inténtenlo también)}$$

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle a| (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) |b\rangle = 1$$

$$\langle b|\hat{A}|a\rangle = 1 \text{ (análogo)}$$

$$\therefore [\hat{A}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la base fuera $|a\rangle, |b\rangle, \dots, |z\rangle$

$\hat{A} = |a\rangle\langle f|$ representa una matriz de 25×25

Calculemos las componentes de $A|\psi\rangle$.

- Dados $|N\rangle = \sum_i \psi_i |u_i\rangle$ y $A = \sum_{ij} A_{ij} |u_i\rangle \langle u_j|$

$$A|\psi\rangle = \left(\sum_{i,j} A_{ij} |a_i\rangle\langle a_j|\right) \left(\sum_k \psi_k |a_k\rangle\right) = \sum_{i,j,k} A_{ij} \psi_k |a_i\rangle \langle a_j|a_k\rangle \overset{\delta_{jk}}{=} \sum_{i,j} A_{ij} \psi_j |a_i\rangle$$

¿Cómo se calcula $\langle \phi | A | \psi \rangle$ a partir de las componentes?

$$\underbrace{\langle \phi | A | \psi \rangle}_{\text{número}} = \sum_{ij} \phi_i^* A_{ij} \psi_j$$

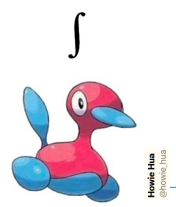
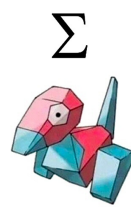
- El conjugado hermitiano (Relación entre $\hat{A}$ y $\hat{A}^\dagger$).

$$(\hat{A}^+)_{ij} = \langle u_i | \hat{A}^+ | u_j \rangle = \langle u_j | \hat{A} | u_i \rangle^* = A_{ji}^*$$

transpuesto $ij \leftrightarrow ji$ y conjugado.

- $\Rightarrow$ operadores que cumplen $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ se llaman hermitianos o autoadjuntos

- Los elementos diagonales de un hermitiano son reales pues son iguales a su conjugado.



Bases continuas

Base discreta

Cardinalidad finita o numerable
Kronecker

ortonormal $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

componentes $|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$

$$c_j = \langle u_j | \psi \rangle$$

sucesión

Completez $\sum |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbb{1}$

Matrices $A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$

Producto punto $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum \varphi_i^* \psi_i$

Las bases continuas son stiles como una idealización matemática (como ondas planas)

Base continua

no numerable

$\langle \omega_\alpha | \omega_{\alpha'} \rangle = \delta(\alpha - \alpha')$
Dirac

$$|\psi\rangle = \int d\alpha C(\alpha) |\omega_\alpha\rangle$$

$$C(\alpha) = \langle \omega_\alpha | \psi \rangle$$

función de α

$$\int d\alpha |\omega_\alpha\rangle \langle \omega_\alpha| = \mathbb{1}$$

$$A(\alpha, \alpha') = \langle \omega_\alpha | A | \omega_{\alpha'} \rangle$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int \varphi^*(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha$$

Hablar de $\{|x\rangle\}$ y $\{|p\rangle\}$ antes de $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$.

Ejemplo de base continua $\{|\vec{r}\rangle\}, \{|\vec{p}\rangle\}$

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle ; \psi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$$